پکش کره

مساله ی پکش بیشینه برای کره ها، فشرده ترین روش ممکن برای چیدن تعداد زیادی گوی همسان را طلب میکند. ارتباط نزدیکی میان پکش بیشینه و چند مساله یِ دیگر وجود دارد. برای مثال مساله یِ "عدد بوسه" حداکثر تعداد گویهایی که یک گوی هم اندازه را لمس میکنند، میپرسد یا مساله ی "پوشش" (شاید ترجیح بدهید آنرا مساله ی آنتن بنامید)، کم ترین تعداد بر واحد حجم کره های همپوشان لازم برای پوشاندن کل فضا را مورد سوال قرار میدهد.
این مسائل (یا حداقل تعمیمهای آنها چنانکه خواهیم دید) کاربردهای غیرمنتظری در نظریه ی اعداد، مخابرات آنالوگ و دیجیتال، شیمی (یا فیزیک) حالت جامد و نظریه ی ابرریسمان ها پیدا کرده اند. بهرحال نویسنده نه میتواند نه برآنست که این کاربردها را مورد بررسی قرار دهد. در ادامه، خود مساله را برای خود مساله (چنانکه ریاضی پیشگان ترجیح خواهند داد) مورد مداقّه قرار میدهیم.
تا وقتی تعمیم مناسبی برای کره، در بعدهای بالاتر یا پایینتر از ۳ داشته باشیم، همه ی این مسائل نیز تعمیمی بدیهی خواهند داشت. این تعمیم ها عموما حل نشده اند و یا حل (اثبات) های بسیار پیچیده برای آنها موجود است. مساله ی پکش یک بعدی چنان بدیهی است که شایان توجه و حل نبوده است. بلافاصله در بعد دو، اثبات بهینه بودن یک پکش خاص چنان دشوار میشود که تا انتشار مقاله یِ فژه تاث در دهه ی ۵۰ میلادی حل نشده باقی میماند. کپلر در قرن هفدهم، پاسخ را برای مساله ی ۳ بعدی حدس میزند با این حال اثبات این حدس نیز تا اواخر هزاره ی دوم میلادی به تعویق میافتد و در نهایت اثبات منتشر شده توسط تامس هیلز، بالغ بر صد صفحه است، از روشهای محاسبات عددی (برنامه ریزی خطی) استفاده میکند و بطور خلاصه چنان پیچیده است که تا سالها پس از انتشار، اعتماد کامل جامعه ی ریاضیدانان را جلب نمیکند.
در روز پی (۱۴ مارچ) ۲۰۱۶، مارینا ویازوفسکا، ریاضیدان ۳۱ ساله ی اوکراینی، حل مساله ی ۸ بعدی را از طریق وبسایت arXiv منتشر میکند. مقاله تنها ۲۴ صفحه دارد و چنان ساده و قابل هضم است که تنها یک هفته بعد، با استفاده از روشهای مشابه مساله در ۲۴ بعد حل میشود.
مساله های پکش به پیش زمینه ی چندانی برای تفکر نیاز ندارند و تقریبن هرکسی با هر سطح سوادی میتواند به آنها بپردازد. آنچه میخوانید روایتی از دستاوردهای قدیم و اخیر و خلاصه ای از مفاهیمی که احتمالن برای پرداختن به این مسائل ضروری اند خواهد بود.

۱ شبکه ها و تقارنهایشان

۱.۱ شبکه ها

یک پکش خاص d بُعدی، در واقع یک مجموعه ی نامتناهی و شمارا از نقاط در R^d مانند Π است. این نقاط، مراکز گویها را مشخص میکنند. بنابراین شعاع پکش میشود

$$r(\Pi) \equiv \frac{1}{2} \inf_{\vec{x},\vec{y}\in\Pi,\ \vec{x}\neq\vec{y}} |\vec{x}-\vec{y}|$$

معمولترین روش پکش، پکش شبکه ای است. پکشهای شبکه ای از عمل یک ماتریس مربعی روی مجموعه ی نقاط صحیح، Z^d، بدست میآیند. بنابراین از این به بعد آنها را با یک ماتریس مانند M نشان خواهیم داد. به زبان ریاضی

$$\Pi_M \equiv \{\vec{x}\in R^d \mid \exists\vec{z}\in Z^d, M\vec{z}=\vec{x}\}$$

در اینصورت، M را ماتریس شبکه و ستونهای آنرا بردارهای شبکه میخوانیم. اگر این بردارهای شبکه، $\vec{m_j}$ باشند، بردار مکان مراکز کره ها به صورت $\sum_j z_j\vec{m_j}$ قابل بیان خواهند بود. همانطور که گفتیم مساله ی پکش در ۵ بعد مختلفِ ۱، ۲، ۳، ۸ و ۲۴ حل شده است. همه ی این پکشهای بهینه، شبکه ای هستند. البته در بعضی از بعدها، مانند ۹ بهترین پکشهایی که تاکنون شناخته شده اند، ساختار مشبک ندارند و این یک حدس پرطرفدار است که در بعدهای بالا، پکشهای بهینه ساختار مشبک ندارند. بهرحال از این ببعد تمامی توجهمان را به یافتن بهترین پکش مشبک معطوف خواهیم کرد. این، مساله را بیشتر از آنچه به نظر میرسد ساده خواهد کرد.
گزاره: شعاع یک پکش شبکه ای صفر است اگر و تنها اگر ماتریس شبکه تکین باشد.
برای اثباتِ "تنها اگر"، داریم

$$\forall\epsilon>0\exists\vec{z}\in Z^d\backslash\{\vec{0}\}, |M\vec{z}|<\epsilon$$

$$\Rightarrow |M\frac{\vec{z}}{|\vec{z}|}|<\epsilon$$

بنابراین بردار صفر، یک نقطه ی حدی برای تصویر سطح کره ی d بعدی، S^{d-1}، تحت نگاشت ماتریس M است. از پیوستگی نگاشت و فشردگیِ S^{d-1} نتیجه میشود که بردار یکه ی $\hat{n}$ وجود دارد به طوریکه

$$M\hat{n}=0$$

و این تکنیگی M را نتیجه میدهد.
برای اثبات "اگر" دقت میکنیم که حداقل یکی از بردار های شبکه، برحسب بقیه قابل بیان است:

$$\vec{m}_d = \sum_{j=1}^{d-1} c_j \vec{m}_j$$

این یک نتیجه ی ساده و قابل اثبات است که اگر همه یِ c_i ها گویا نباشند، میتوان با تقریب دلخواه، نوشت

$$\sum_{i=1}^{d} \mathcal{N}_i \vec{m}_i \simeq 0$$

که نتیجه ی مطلوب است. اگر تمام ضرایب گویا باشند، حتا نیازی به تقریب نیست و بینهایت جواب دقیق برای معادله ی بالا موجود خواهد بود.
تا اینجا دانستیم که هر ماتریس وارونپذیر، یک پکش مشبک با شعاع غیر صفر را نتیجه میدهد. برای محاسبه ی چگالی این پکش ها، ابتدا باید حجم کره ها را محاسبه کرده و در تعداد کره ها بر واحد حجم ضرب کنیم. شعاع کره ها میشود

$$r(M) = \frac{1}{2} \inf_{\vec{z} \in Z^d \setminus \{\vec{0}\}} |M\vec{z}|$$

بنابراین، حجم هر کره با رابطه ی

$$V = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} r^d(M)$$

بدست خواهد آمد. برای محاسبه ی تعداد کره ها بر واحد حجم دقت میکنیم که مراکز کره ها از اثر M روی شبکه ی ساده ی اعداد صحیح بدست آمده اند و بنابراین در هر سلول با حجم $\det(M)$ یک کره وجود دارد. در نهایت رابطه ی چگالی پکش مشبک با ماتریس شبکه بدست میآید

$$\Delta_M = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \frac{r^d(M)}{\det(M)}$$

محاسبه ی این کمیت برای یک ماتریس شبکه ی داده شده، البته کار آسانی نیست. در واقع Ajtai در سال ۱۹۹۸ نشان داده است که مساله پیدا کردن کوتاهترین بردار شبکه، یا نزدیکترین نقطه ی شبکه به نقطه ی دلخواه داده شده، NP-hard است. بعبارت دیگر مسائل بسیار گسترده ای را میتوان به این مساله کاهش داد و باور بسیار قوی بر اینست که راه حل چندجمله ای برای حل آن جود ندارد. (نگاه کنید به ویکیپدیا در باره ی NP vs. P).
مساله ی پکش بیشینه، بسیار ساده بیان میشود و بنابراین تقارنهای بسیاری دارد. استفاده از تقارنها در هر مساله ی بهینه سازی میتواند فضای جستجو را محدودساخته و بسیار کمک کننده باشد. مثلن اگر بدنبال بهترین پکش مشبک هستیم، در ابتدا به نظر میرسد هر ماتریس (وارونپذیر) یک پکش مناسب است و باید در فضای R^{d^2} جواب را جستجو کرد. چنانکه خواهیم دید، تقارنها این فضا را کوچک خواهند کرد. هر تقارن پیوسته، یک درجه ی آزادی را کاهش میدهد و هر تقارن گسسته، به صورت یک نامساوی فضا را محدود میکند.

۲.۱ مقیاس

رابطه ی چگالی، همانطور که هست، تحت مقیاس ناورداست. بنابراین ما مقیاس را معمولن بگونه ای میگیریم که $r(M) = 1/2$ همواره برقرار باشد.

۳.۱ همسانگردی، دوران های SO(d)

SO(d) یک گروه پیوسته برای نمایش $\frac{d(d-1)}{2}$ تقارن مستقل است. بنابراین حدس میزنیم $\frac{d(d-1)}{2}$ درجه ی آزادی را حذف کند. واضح است که با دوران مناسب پایه های نمایش M میتوان آنرا بالا مثلثی کرد و به این ترتیب، حدس ما تایید میشود.

۴.۱ پاریته

اگر یکی از مختصه های مکانی مانند x_1 را قرینه کنید، چگالی شبکه تغییر نمیکند. با استفاده از این تقارن گسسته ی پاریته، میتوان فرض کرد همه ی درایه های قطری ماتریس شبکه، (که تا اینجا بالامثلثی شده است) مثبت هستند.

۵.۱ عملیات پایه و صحیح ستونی

شبکه ای دو بعدی با بردار های $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را در نظر بگیرید. واضح است که شبکه و در نتیجه چگالی آن با شبکه ای که از بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{u}+n\vec{v}$ برای هر n صحیح تشکیل شود، همسان است. بعبارت کلیتر دو ماتریس M و M' شبکه ی یکسانی تولید میکنند اگر $M^{-1}M'$ بالا مثلثی، صحیح و با درایه های قطری واحد باشد. این اعمال پایه وصحیح ستونی یک گروه تشکیل میدهند. با استفاده از تقارن متناظر با این گروه میتوانیم محدودیت بیشتری روی ماتریس های شبکه اعمال کنیم

$$M_{ij} \in [0, M_{ii}) \qquad i < j$$

همچنین، اگر $r(M) = 1/2$ را بپذیریم، بدون کاستن از کلیت میتوان بردار ها را طوری جابجا کرد که $M_{11} = 1$ استیفا شود. این تقارن اخیر هنوز هم بطور کامل استفاده نشده است اما همینجا کار را متوقف خواهیم کرد.

با استفاده از این تقارنها برای مثال کلیترین شبکه ی دوبعدی را میتوان به صورت

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

با شرطهای $x \in [0, 1)$ و $y > 0$ نوشت. بیشینه کردن چگالی، با کمینه کردن y با شرط

$$\min(x, 1-x)^2 + y^2 \geq 1$$

معادل است که به جواب

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

میانجامد. این شبکه، همان شبکه ی لانه زنبوری آشناست که در واقع بهترین پکش در دوبعد است. البته که این نتیجه، بسیار ساده تر از چیزیست که فِژه تاث در دهه ی پنجاه برای اولین بار به اثبات رساند. بخاطر بیاورید که اثبات او محدود به پکشهای مشبک نیست.

۶.۱ چند شبکه ی خاص

در این قسمت به چند شبکه که نامزد (یا خود) بهترین پکش ها هستند میپردازیم. نخستین آنها، شبکه های D_n هستند. شبکه های D_n مجموعه ی تمام نقاط صحیح هستند که مجموع مولفه های زوج دارند. D_1، D_2، D_3، D_4 و D_5 بهترین پکشهای شناخته شده در این ابعاد هستند.

$$D_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

از بعد ۵ ببعد، پکشهای بهتری از اینها وجود دارند. در بعد ۸، این پکش چنان تنک است که میتوان یک نسخه از آن را با بردار

$$(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)^T$$

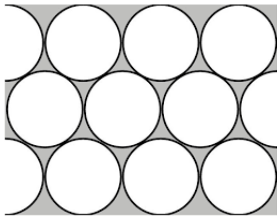
انتقال داد و بدون همپوشانی با نسخه ی اصلی به شبکه اضافه کرد. این دو برابر شدن چگالی ناگهان چنان شبکه را بهبود میبخشد که پکش بهینه در بعد ۸ را القا میکند. این شبکه را شبکه ی ریشه ای مینامند

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

همچنین شایسته است از شبکه ی لیچ (Leech) که بعنوان پکش بهینه در ۲۴ بعد باثبات رسیده است، نام ببریم. شبکه ی لیچ یا Λ_{24} شبکه ایست که
- دترمینان واحد دارد.
- مجذور طول ستونهای آن، صحیح و زوج هستند.
- شعاع پکش آن واحد است.

۲ یک حدس

فرض کنید شبکه ی d بعدی بهینه را در اختیار داشته باشید. آیا میتوانید پکش مشبک بهینه $d+1$ بعدی را از روی آن بسازید؟ بعنوان مثال فرض کنید شبکه ی بهینه در یک بعد را در اختیار دارید. چگونه بهترین پکش در دو بعد را می یابید؟ ممکن است حدس بزنید با چیدن این شبکه ها روی هم و فشردن آنها تا جای ممکن به یکدیگر پکش بهینه ی دو بعدی را می سازید. این حدس همانطور که از شکل زیر هم پیداست، گاهی پاسخ درست را بدست میدهد. اگر بتوان همین روش را برای هر بعد دلخواه تکرار کرد، به یک راه حل با زحمت مشخص برای مساله در بعد دلخواه میرسیم. چنانکه خواهیم دید این روش، پاسخ درست را (یا بهترین پاسخ موجود تا بحال را) تا $d = 5$ حدس میزند و پس از آن غلط از آب در میآید.



برای توصیف جزییترِ الگوریتم فرض کنید بردارهای شبکه ی داده شده، $\{\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3, \cdots, \vec{m}_d\}$ باشند. قرار است شبکه ی $d+1$ بعدی را با انتقال های همین شبکه بسازیم بنابراین باید یک بردار مانند $\vec{v}$ به این مجموعه افزود. همواره میتوان نوشت

$$\vec{v} = \sum_i \alpha_i \vec{m}_i + h\hat{e}_{d+1}$$

برای هر چه فشرده تر کردنِ پکش جدید باید h را کمینه کرد بدون آنکه کره ها در هم فرو بروند

$$h(\vec{\alpha}) = \sqrt{1 - \Big(\min_{\vec{z}\in Z^d} |M\vec{z} - M\vec{\alpha}|\Big)^2}$$

بنابراین مساله هم ارز خواهد بود با یافتن $\vec{\alpha}$ یِ مناسب که تابع

$$\min_{\vec{z}\in Z^d} |M\vec{z} - M\vec{\alpha}|$$

را بیشینه کند. این بردار را نقطه ی کور یا deep hole مینامند. حالا روش کار مشخص است؛ نقطه ی کور را پیدا میکنید و از روی آن، بردار جدیدی به بردار های قبلی میافزایید. پی گرفتن این روش، تا $d = 6$ به ماتریس شبکه ی زیر میانجامد

$$M_6 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{15}{32}} \end{pmatrix}$$

چگالیهای القا شده توسط این ماتریسها و بهترین پکشهای شناخته شده تا بعد ۸ در زیر آمده اند.

d	Δ_M	$\hat{\Delta}$
۱	۱	۱
۲	$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$
۳	$\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$
۴	$\frac{\pi^2}{16}$	$\frac{\pi^2}{16}$
۵	$\frac{\pi^2}{15\sqrt{2}}$	$\frac{\pi^2}{15\sqrt{2}}$
۶	$\frac{\pi^3}{48\sqrt{3}}$	$\frac{\pi^3}{24\sqrt{15}}$
۷	$\frac{\pi^3}{105}$	؟
۸	$\frac{\pi^4}{384}$	؟

۳ کرانها

یکی از راههای حدس زدن بهترین پکش برای بعدهای مختلف، بدست آوردن کرانهای بالا و پایین برای چگالیهای بهینه است. ساده ترین کران پایین با استدلال زیر بدست میآید.

چگالی ناشی از پکش بیشینه در بعد d را $\hat{\Delta}(d)$ بگیرید. اگر شعاع کره های این پکش را دوبرابر کنیم، (اجازه دهید کره ها همپوشانی داشته باشند.) تمام فضا توسط کره ها پر میشود؛ چرا که اگر نقطه ای باقی بماند یعنی از نزدیکترین مرکز بیش از $2r$ فاصله دارد. بنابراین میتوان با افزودن کره ای در آن نقطه پکش را بهبود بخشید که با بهینگی در تناقض است. اما این استدلال ساده نشان میدهد که

$$\hat{\Delta}(d) \geq 2^{-d}$$

جالب اینجاست که این تقریبن بهترین کران پایین بدست آمده برای پکش هاست.

ساده ترین پکش ممکن که با ماتریس شبکه ی همانی $M = 1$ تولید میشود را در نظر بگیرید. چگالی این پکش بسیار سریعتر از حد پایین بدست آمده به صفر میرود

$$\Delta_1(d) = \frac{(\pi/4)^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(d/2+1)}$$

این سقوط فرانمایی مشخصه ی تمام پکشهای عمومی موجود است و هنوز یک پکش عمومی با سقوط نمایی چگالی پیشنهاد نشده است.

همچنین با استفاده از روشهای برنامه ریزی خطی میتوان کرانهای بالایی برای چگالیهای بهینه ارایه کرد. بهترین کران بالای موجود در سال ۱۹۷۸ توسط کاباتیانسکی و لونشتاین به صورت

$$\hat{\Delta}(d) \leq 2^{-.599d}$$

بدست آمده است.

بنابراین یک سقوط نمایی چگالیهای پکش اجتناب ناپذیر خواهد بود. اما چرا بعدهای بالا، بخوبی با کره ها پر نمیشوند؟ میدانیم که مکعب ها در هر بعدی میتوانند فضا را کاملن بپوشانند. همچنین کره و مکعب در $d = 1$ هر دو موجودات یکسانی هستند. بنابراین حدس میزنیم تفاوت کره و مکعب در بعدهای بالا، فراوانتر شود. کره در همه ی ابعاد تحت دوران ناورداست اما فاصله ی یک مکعب تا مرکز آن از ۱ تا $\sqrt{d}$ متغیر است. در $d = 1000000$ اگر کره ها را همچنان شبیه تیله های گرد با شعاع واحد بگیریم، یک مکعب واحد، خارپشتی با 2^{10^6} خار، هر یک بطول ۱۰۰۰ خواهد بود! بنابراین فضایی که با مکعب ها به طور کامل پوشانده شود، بطور قطع فضای مناسبی برای چیدن تیله های صاف و غلتان نیست.

۱.۳ قضیه ی مقدار میانگین زیگل و کرانهای پایین

یک تابع حقیقی مقدار از فضای اقلیدسی d بعدی مانند f را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید یک شبکه با یک ماتریس ویژه ($\det S = 1$) مانند S داده شود. تعریف میکنیم

$$\mathcal{X}(S) \equiv \sum_{\vec{z} \in Z^d} f(S\vec{z})$$

مجموعه ی ماتریسهای ویژه، یک گروه تشکیل میدهند و بنابراین اندازه ی ناوردای مخصوصی روی آن تعریف میشود. وجود و متنهای بودن این اندازه موسوم به اندازه ی هار (Haar) یک نتیجه ی عمومی در مورد گروه های پیوسته است. اگر متوسط $\mathcal{X}$ نسبت به این اندازه را با $\langle \mathcal{X} \rangle_S$ نشان دهیم، قضیه ی مقدار میانگین زیگل بیان میکند؛

$$\langle \mathcal{X} \rangle_S = \int_{R^d} d\mu f(\vec{x})$$

که در آن،انتگرال با توجه به اندازه ی لبگ (حجم) گرفته میشود. اثبات این قضیه با توجه به ناوردایی عبارت دست چپ تحت تبدیلات ویژه و خطی بودن آن نسبت به تابع f بسادگی محقق میشود.

با استفاده از این قضیه (و قضایای مشابه) میتوان حد پایین بهتری برای چگالی بهینه یافت. فرض کنید ماتریس شبکه را بدون کاستن از کلیت، ویژه بگیریم. همچنین تابع را تابع مشخصه ی کره ای با حجم ۲ به مرکز مبداء مختصات بگیرید.

$$f(\vec{x}) = 1(|\vec{x}| \leq \ell) \qquad \frac{\pi^{d/2}\ell^d}{(n/2)!} = 2$$

عبارت سمت چپ قضیه ی زیگل، میانگین تعداد نقاط شبکه های ویژه درون این کره و سمت راست برابر با ۲ میشود. از طرفی، اگر نقطه ی $\vec{x}$ از شبکه درون کره باشد، نقطه ی قرینه ی آن یعنی $-\vec{x}$ نیز درون کره خواهد بود. بنابراین، این تعداد همواره عددی فرد (با احتساب بردار صفر) خواهد بود. اما میانگین این اعداد فرد برابر با ۲ شده است. بنابراین حداقل برای برخی ماتریسهای شبکه، تنها نقطه ی شبکه درون کره با حجم ۲، خود مبدا خواهد بود. یعنی نزدیکترین فاصله در این شبکه ها از ℓ بزرگتر است و در نتیجه برای این شبکه ها، چگالی حتمن بزرگتر از $\frac{2}{2^d}$ خواهد بود و این یک کران پایین جدید است.

$$\hat{\Delta}(d) \geq 2^{1-d}$$

در واقع این کران پایین را مینکفسکی در سال ۱۹۰۵ بدست آورد. البته بعد از او هم کرانهای بهتری به اثبات رسیده اند. آخرین کران بالا که در سال ۲۰۱۳ توسط ونکاتش (Venkatesh) ارایه شده است نشان میدهد

$$\hat{\Delta}(d) \geq Ad \log\log(d) 2^{-d}$$

۴ دیگر پکشها

علی الاصول هر مساله ی چیدن بهینه ی اشیا (متفاوت یا مشابه) یک مساله ی پکش مخصوص بخود است. ممکن است بخواهید چند دایره را در یک بیضی بزرگتر بچینید، تعدادی کدواژه با فاصله ی همینگ مشخص را در چند بیت بگنجانید یا بعنوان یک مساله با تنوع بیشتر، ممکن است بخواهید بدانید حداکثر چند وزیر را میتوان روی یک صفحه ی شطرنج نشاند بدون آنکه هیچکدام دیگری را تهدید کنند.

یکی از مسائل پکش که به پکش کره ها بسیار نزدیک است، مساله ی پکش دوایر روی سطح یک کره است. بعبارت دیگر: حداکثر چند مخروط مشابه یکطرفه میتوان از مبدا مختصات سه بعدی خارج کرد، بدون آنکه همپوشانی داشته باشند؟ این مساله، تقارن کمتری نسبت به پکش کره ها دارد زیرا پاسخ صد البته بستگی به نیمزاویه ی راس مخروط، α، دارد. مثلن در حد $\alpha \to 0$ مساله با پکش دو بعدی کره ها هم ارز میشود. بطور خاص به

$$\alpha = \arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6}$$

علاقمندیم. این همان مساله ی مربوط به عدد بوسه است که میپرسد حداکثر چند کره ی ناهمپوشان مشابه را میتوان با سطح یک کره ی مشترک مماس کرد؟ همانطور که گفتیم، بسیاری از پکش های بهینه، مساله ی اخیر را هم حل کرده اند. با این حال بیشینه کردن چگالی همیشه به بیشینه کردن تعداد بوسه ها نمیانجامد.

امیدوارم آنچه خواندید سوالاتی را در ذهنتان ایجاد کرده باشد. در این صورت احتمالن جستجو میان مراجع را جذاب خواهید یافت.

۵ منابع

۱. جامعترین مرجع تا قبل از انتشار، احتمالن کتاب زیر است.

J. H. Conway and N. J. A. Sloane; *Sphere Packings, Lattices and Groups* (Third Edition, Springer, 1998)

۲. خلاصه ای از داستان بعد های مختلف را، نویسندگان مرجع قبل در زیر آورده اند.

J. H. Conway and N. J. A. Sloane; *What are all the best sphere packings in low dimensions?* (1995)

۳. شاید جثه ی اثبات هیلز برایتان جالب باشد.

T. Hales; *A Proof of the Kepler Conjecture* (Annals of Mathematics, 162 (2005), arXiv 1065.1185)

۴. مقایسه کنید با مقاله ی ویازفسکا

M. S. Viazovska; *The sphere packing problem in dimension 8*; arXiv:1603.04246v2

۵. این اثبات تنها دو هفته بعد منتشر شد.

H. Cohn et al.; *The sphere packing problem in dimension 24*; arXiv:1603.06518v3

۶. روایت کوهن از این ماجرا را اینجا خواهید یافت.

Henry Cohn; *A CONCEPTUAL BREAKTHROUGH IN SPHERE PACKING*; arXiv:1611.01685v1

۷. کوهن، درسنامه ای کوتاه و بسیار خواندنی در این باره دارد.

Henry Cohn; *Packing, coding, and ground states*; arXiv:1603.05202v1